泰勒级数

用多项式逼近函数

高等数学 · 课件示例

从切线说起

离 a 不远时，切线就是一个好近似

函数在 $x = a$ 附近的取值，可以用它在 a 点的值和斜率来估计：

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

它只用到 $f(a)$ 和 $f'(a)$。想更准，就让近似式在 a 点的 **二阶、三阶……导数也和 f 一致**。多项式只需要加法和乘法，正适合做这件事。

让各阶导数都对上：泰勒多项式

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

- 对 $(x-a)^k$ 求 k 阶导数得到 $k!$，所以系数里要除以 $k!$。
- 这样 T_n 在 a 点的 0 到 n 阶导数都与 f 相同。
- $a = 0$ 时又叫麦克劳林多项式。

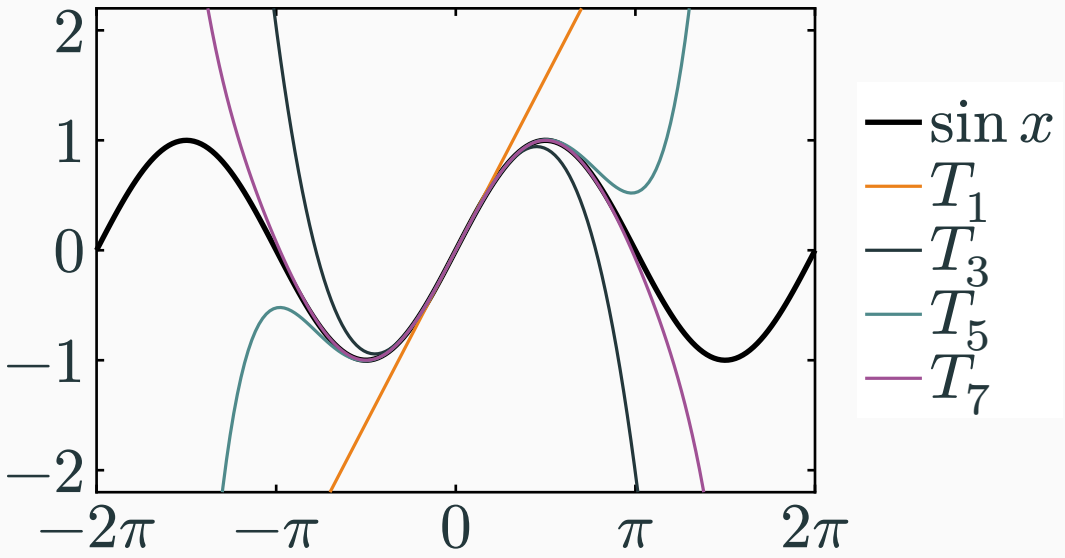
一个例子：$\sin x$

阶数越高，贴合的区间越宽

$\sin x$ 在 0 处的各阶导数依次是 $0, 1, 0, -1, \ldots$，于是

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

每多加一项，近似可用的区间就向外延伸一段。



误差有多大：拉格朗日余项

若 f 在 a 与 x 之间有 $n+1$ 阶导数，则存在介于两者之间的 ξ，使

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

对 $\sin x$，各阶导数的绝对值都不超过 1，所以在 $a=0$ 处

$$|\sin x - T_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

算一算：$\sin 0.1$

取两项：

$$\sin 0.1 \approx 0.1 - \frac{0.1^3}{6} = 0.0998333\ldots$$

$\sin x$ 的 x^4 项系数为 0，所以 $T_3 = T_4$，按 $n = 4$ 估计误差：

$$|R_4| \le \frac{0.1^5}{5!} \approx 8.3 \times 10^{-8}$$

两项就准到小数点后七位。

离展开点越近、阶数越高，误差下降得越快：分母是阶乘。

常用展开

记住这五个，大多数题目够用

函数	在 0 处展开	成立范围
e^x	$1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \cdots$	全体实数
$\sin x$	$x - x^3/3! + x^5/5! - \cdots$	全体实数
$\cos x$	$1 - x^2/2! + x^4/4! - \cdots$	全体实数
$\ln(1+x)$	$x - x^2/2 + x^3/3 - \cdots$	$-1 < x \leq 1$
$1/(1-x)$	$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$	$-1 < x < 1$

三个级数放在一起：欧拉公式

把 $x = i\theta$ 代入 e^x 的级数，按实部和虚部分组：

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right)$$

括号里正是 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的级数：

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad e^{i\pi} + 1 = 0$$

课后练习

1. 写出 $\cos x$ 在 0 处的 T_4，用它计算 $\cos 0.2$，并用余项估计误差。
2. 用 e^x 的展开计算 e，要精确到小数点后四位，至少需要多少项？
3. 为什么 $\frac{1}{1-x}$ 的展开在 $x=2$ 处不能用？画出 T_3 和原函数比较。

多项式能逼近函数，
余项告诉你逼近得多好。